CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ,,LAURENŢIU PANAITOPOL"
TULCEA, 1 APRILIE 2017
SUBIECTELE
CLASA a 11-a

1. Fie n un număr natural nenul şi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 = I_n$, $B^2 = 2I_n$ şi $AB = BA$. Arătaţi că, dacă a, b sunt numere întregi, nu ambele nule, atunci matricea $aA + bB$ este inversabilă.

2. Fie ABC un triunghi în plan, având vârfurile de coordonatele întregi, aria S şi care verifică relaţia $(AB+AC)^2 < 8S+1$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi d_n cel mai mare divizor comun al elementelor matricei $A^n - I_2$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$.

4. Vom spune că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip *zero plus* dacă are termeni strict pozitivi şi limita 0.

a) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus şi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, atunci şirul $(x_{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0.

b) Arătaţi că, dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este de tip zero plus, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este o funcţie bijectivă, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ are limită, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 1.

c) Daţi un exemplu de şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tip zero plus şi de funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $y_n = \dfrac{x_{f(n)}}{x_n}$ să nu aibă limită.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7
Timp de lucru 3 ore